ЦЕПИ МАРКОВА: КАК СИСТЕМА ЗАБЫВАЕТ НАЧАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ

Гаянова М.М., к.т.н, доцент,
Юрьев В.О., бакалавр,
Вафин О.Э., бакалавр,
УУНиТ, г. Уфа, Россия

Аннотация: В работе рассматривается явление перемешивания в цепях Маркова, при котором распределение состояний системы перестаёт зависеть от начального распределения. Обсуждаются математические критерии забывания начального состояния. Анализируются алгоритмические и программные аспекты моделирования этого процесса.

Ключевые слова:цепь Маркова, стационарное распределение, матрица переходов, численное моделирование.

Дискретные цепи Маркова описывают системы, которые случайным образом переходят из одного состояния в другое, причём вероятность перехода зависит только от текущего состояния. Одно из наиболее интересных свойств таких систем — способность «забывать» своё начальное состояние. Если цепь обладает достаточно хорошими свойствами, то через некоторое число шагов распределение вероятностей состояний становится почти не зависящим от того, где система находилась в начале.

Это свойство лежит в основе многих практических приложений: от анализа надёжности технических систем до алгоритмов Монте-Карло и моделей машинного обучения. Целью данной работы является описание механизма забывания начального состояния, критериев, при которых оно происходит, и способов программной реализации соответствующих вычислений[5].

Пусть система может находиться в одном из n состояний. Обозначим через p_{ij} вероятность перехода из состояния i в состояние j. Совокупность этих вероятностей образует матрицу переходов P размером $n \times n$. Если вектор $\pi(0)$ задаёт начальное распределение вероятностей по состояниям, то распределение на шаге k вычисляется как $\pi(k) = \pi(0)p_k$.

Стационарным называется распределение π^*, удовлетворяющее условию $\pi^* p = \pi^*$. Если цепь неприводима и апериодична, то стационарное распределение единственно и к нему сходится распределение цепи при любом начальном состоянии [4]. Именно это и означает «забывание» начального состояния: с ростом k вектор $\pi(k)$ приближается к π^*, и влияние $\pi(0)$ исчезает.

Интуитивно процесс выглядит так. На первых шагах распределение ещё помнит, откуда стартовала система. Однако на каждом шаге вероятностная масса «размазывается» по достижимым состояниям. Если цепь хорошо связана, то уже через несколько переходов вероятность оказаться в данном состоянии определяется в основном структурой матрицы переходов, а не точкой старта.

Формально скорость забывания характеризуется коэффициентом эргодичности. Один из распространённых показателей — второй по величине модуль собственного значения матрицы переходов.

Несколько факторов влияют на скорость забывания начального состояния. Первый фактор — структура графа состояний. Если состояния образуют плотно связанную сеть, перемешивание происходит быстро. Если же граф распадается на слабо связанные кластеры, забывание может быть медленным.

Второй фактор — наличие «почти поглощающих» состояний, из которых вероятность выхода мала. Такие состояния надолго задерживают вероятностную массу и замедляют сходимость.

Третий фактор — размер системы. С ростом числа состояний обычно увеличивается и время, необходимое для перемешивания, хотя это не является жёстким правилом.

В таблице 1 приведены качественные оценки скорости забывания для разных типов цепей [6].

Таблица 1. –Скорость забывания начального состояния для различных типов цепей

Тип цепи	Характеристика	Скорость забывания
Полносвязнаяцепь	Все переходы ненулевые	Очень высокая
Разреженнаяоднороднаяцепь	Каждое состояние связано с несколькимисоседями	Средняя
Цепь с кластерами	Слабая связь между группами состояний	Низкая
Цепь с почти поглощающим состоянием	Малый выход из состояния	Очень низкая

Цепи Маркова имеют обширное практическое применение. Их используют на предприятиях, чтобы проанализировать частоту поломок сложного технического оборудования[1]. Для этого строят модель в которой каждое состояние является комбинацией различных блоков. Они могут быть работающими или сломанными. При этом переходы являются вероятностью нештатных случаев.

Другим вариантом применения является поисковые системы[2]. Алгоритмы принимают решение о том, какие страницы пользователь увидит в первую очередь. Самый простой способ это узнать – смоделировать поведение пользователя [3]. Например, по каким страницам он с наибольшей вероятностью перейдет. Такая страница будет называться авторитетной.

Цепи Маркова активно используются в том, чем мы пользуемся ежедневно. Простой поиск информации в интернете задействует целый алгоритм, элементом которого являются цепи Маркова. В работе представлен анализ его свойства забывания первоначального состояния. Составлена сравнительная таблица скорости забывания начального состояния в зависимости от типу цепи.

Литература

1. Белоусова, М. В. Практическое применение цепей Маркова для выбора наилучшего типа резервирования автоматизированной системы / М. В. Белоусова, В. В. Булатов // Современные наукоемкие технологии. – 2022. – № 10-1. – С. 9-13. – DOI 10.17513/snt.39338. – EDNOLPARU.

2. Мухамова, Г. А. г. Использование цепей Маркова для моделирования образовательного процесса / Г. А. г. Мухамова // Проблемы естественных, математических и технических наук в контексте современного образования : Материалы Международной научно-практической конференции, Липецк, 24–25 октября 2024 года. – Липецк: Липецкий государственный педагогический университет им. П.П. Семенова-Тян-Шанского, 2024. – С. 71-75. – EDN YYVCAF.

3. Разработка численного метода для оптимального управления с обратной связью для непрерывной системы, аппроксимируемой цепью Маркова / К. В. Степанян, А. К. Попов, Б. М. Миллер, А. Б. Миллер // Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам (ВМСППС'2017), Алушта, 24–31 мая 2017 года. – Алушта: Издательство МАИ-Принт, 2017. – С. 708-710. – EDN ZSMALX.

4. Резлер, А. В. Метод пробных функций для нахождения оценок скорости сходимости однородных цепей Маркова к инвариантному распределению / А. В. Резлер // Математика : Материалы 62-й Международной научной студенческой конференции, Новосибирск, 17–23 апреля 2024 года. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2024. – С. 312. – EDN NTCCUE.

5. Сапарова, Г. Б. Прогнозирование динамики случайных процессов с помощью цепей Маркова / Г. Б. Сапарова, Г. Ы. Абылкасымова, Ч. Айдаралиева // Вестник науки и образования. – 2026. – № 2-2(169). – С. 6-9. – EDN OEJXBY.

6. Чан, Д. Х. Особенности применения методов теории дискретных цепей Маркова при управлении силами / Д. Х. Чан, Н. Е. Красова // Техника и безопасность объектов уголовно-исполнительной системы : сборник материалов Международной научно-практической межведомственной конференции, Воронеж, 19–20 октября 2016 года / ФКОУ ВО "Воронежский институт ФСИН России". – Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга", 2016. – С. 330-331. – EDN XHHXTP.